Sobre la reducción y discretización de sistemas Lagrangianos forzados

Matías I. Caruso
(trabajo en conjunto con J. Fernández, C. Tori y M. Zuccalli)

CMaLP (UNLP) – CONICET

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
Bahía Blanca, Junio 2023

Índice

Sistemas mecánicos discretos forzados

Sistemas Lagrangianos forzados

Un *sistema Lagrangiano forzado* es una terna (Q, L, f), donde:

* Q es una variedad suave (el *espacio de configuraciones*),
* $L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suave (el *Lagrangiano*),
* $f : TQ \longrightarrow T^*Q$ es una aplicación que preserva fibras (la *fuerza*). Equivalentemente, una 1-forma horizontal sobre TQ.

Principio de Lagrange-d'Alembert
Una curva $q : [a, b] \longrightarrow Q$ es *trayectoria* si satisface

$$\delta \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt + \int_a^b f(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q(t)\ dt = 0,$$

para toda variación δq a extremos fijos.

Sistemas Lagrangianos forzados

Principio de Lagrange-d'Alembert
Una curva $q : [a, b] \longrightarrow Q$ es *trayectoria* si satisface

$$\delta \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt + \int_a^b f(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q(t)\ dt = 0,$$

para toda variación δq a extremos fijos.

Ecuaciones de Euler-Lagrange forzadas
En coordenadas, q es trayectoria sii

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}(q, \dot{q}) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q})\right) + f_i(q, \dot{q}) = 0.$$

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	
(Q, L, f)	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	
(Q, L, f)	
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a,b] \longrightarrow Q$	
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	
(Q, L, f)	
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	$q_\cdot : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	
(Q, L, f)	
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	$q_\cdot : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	$L_d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	
(Q, L, f)	
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\, dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	$q. : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	$L_d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	$f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$
(Q, L, f)	
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	$q_{\cdot} : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	$L_d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	$f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$
(Q, L, f)	(Q, L_d, f_d)
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt$	

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Mundo continuo	Mundo discreto
TQ	$Q \times Q$
$q : [a, b] \longrightarrow Q$	$q. : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$
$L : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$	$L_d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$
$f : TQ \longrightarrow T^*Q$	$f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$
(Q, L, f)	(Q, L_d, f_d)
$\mathfrak{S}(q) := \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t))\ dt$	$\mathfrak{S}_d(q.) := \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1})$

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Un *sistema Lagrangiano discreto forzado* es una terna (Q, L_d, f_d) donde:

- Q es una variedad suave (el *espacio de configuraciones*),
- $L_d : Q \times Q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suave (el *Lagrangiano discreto*),
- $f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$ es una 1-forma sobre $Q \times Q$ (la *fuerza discreta*).

Referencia clásica: *Discrete mechanics and variational integrators* (2001), Marsden y West [4].

Sistemas Lagrangianos discretos forzados

Principio de Lagrange-d'Alembert discreto
Una curva discreta $q_\cdot : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$ es *trayectoria* si satisface

$$\delta \left(\sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) \right) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = 0,$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos.

Principio de Lagrange-d'Alembert discreto
Una curva discreta $q_\cdot : \{0, \ldots, N\} \longrightarrow Q$ es *trayectoria* si satisface

$$\delta\left(\sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1})\right) + \sum_{k=0}^{N-1} f_d(q_k, q_{k+1})(\delta q_k, \delta q_{k+1}) = 0,$$

para toda variación $\delta q_\cdot$ a extremos fijos.

Ecuaciones de Euler-Lagrange discretas forzadas
Una curva discreta $q_\cdot$ es trayectoria sii

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + f_d^+(q_{k-1}, q_k) + f_d^-(q_k, q_{k+1}) = 0$$

para $1 \leq k \leq N-1$.

Reducción de sistemas Lagrangianos forzados

Si tenemos un sistema Lagrangiano forzado (Q, L, f) tal que tanto L como f son “invariantes” por la acción de un grupo de Lie G, ¿podrá “reducirse” su dinámica?

Si tenemos un sistema Lagrangiano forzado (Q, L, f) tal que tanto L como f son "invariantes" por la acción de un grupo de Lie G, ¿podrá "reducirse" su dinámica?

* G un grupo de Lie tal que $G \circlearrowright Q$ de modo que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un fibrado principal y $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.

Si tenemos un sistema Lagrangiano forzado (Q, L, f) tal que tanto L como f son "invariantes" por la acción de un grupo de Lie G, ¿podrá "reducirse" su dinámica?

* G un grupo de Lie tal que $G \circlearrowright Q$ de modo que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un fibrado principal y $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.

* $L \circ l_g^{TQ} = L$ para todo $g \in G$, donde l^{TQ} es la acción de G sobre TQ inducida por la acción de G sobre Q.

Si tenemos un sistema Lagrangiano forzado (Q, L, f) tal que tanto L como f son "invariantes" por la acción de un grupo de Lie G, ¿podrá "reducirse" su dinámica?

* G un grupo de Lie tal que $G \circlearrowright Q$ de modo que $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ es un fibrado principal y $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$.
* $L \circ l_g^{TQ} = L$ para todo $g \in G$, donde l^{TQ} es la acción de G sobre TQ inducida por la acción de G sobre Q.
* $f : TQ \longrightarrow T^*(TQ)$ es G-equivariante.

Reducción de sistemas continuos

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado, G grupo de simetría,
$G_f \leq G$, $J_f : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}_f^*$, $\mu \in \mathfrak{g}_f^*$ valor regular de J_f.

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado, G grupo de simetría, $G_f \leq G$, $J_f : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}_f^*$, $\mu \in \mathfrak{g}_f^*$ valor regular de J_f.

Teorema (de León, Lainz, López-Gordón, 2021, [3])
$*$ *$J_f^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de TQ, $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$ es una variedad simpléctica.*

Reducción de sistemas continuos

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado, G grupo de simetría, $G_f \leq G$, $J_f : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}_f^*$, $\mu \in \mathfrak{g}_f^*$ valor regular de J_f.

Teorema (de León, Lainz, López-Gordón, 2021, [3])

* *$J_f^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de TQ, $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$ es una variedad simpléctica.*
* *f induce una 1-forma horizontal en $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$.*

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado, G grupo de simetría, $G_f \leq G$, $J_f : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}_f^*$, $\mu \in \mathfrak{g}_f^*$ valor regular de J_f.

Teorema (de León, Lainz, López-Gordón, 2021, [3])

* *$J_f^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de TQ, $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$ es una variedad simpléctica.*
* *f induce una 1-forma horizontal en $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$.*
* *Sistema reducido sobre $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$.*

Reducción de sistemas continuos

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado, G grupo de simetría, $G_f \leq G$, $J_f : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}_f^*$, $\mu \in \mathfrak{g}_f^*$ valor regular de J_f.

Teorema (de León, Lainz, López-Gordón, 2021, [3])
∗ *$J_f^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de TQ, $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$ es una variedad simpléctica.*

∗ *f induce una 1-forma horizontal en $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$.*

∗ *Sistema reducido sobre $J_f^{-1}(\mu)/(G_f)_\mu$.*

Dada $\mathfrak{A}$ conexión principal en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$, tenemos un sistema reducido $\left((T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}})_\mu, \widehat{L_\mu}, \widehat{f_\mu}\right)$, donde $\tilde{\mathfrak{g}} := (Q \times \mathfrak{g})/G$ es el fibrado adjunto.

Reducción de sistemas continuos

Tanto el sistema original como el reducido pueden pensarse como elementos de una misma clase (conjetural) de sistemas dinámicos a tiempo continuo llamados *sistemas de Lagrange–Poincaré forzados* y que denotaremos $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ (ver Cendra, Marsden y Ratiu (2001) [1] para el caso sin fuerzas).

Reducción de sistemas continuos

Tanto el sistema original como el reducido pueden pensarse como elementos de una misma clase (conjetural) de sistemas dinámicos a tiempo continuo llamados *sistemas de Lagrange–Poincaré forzados* y que denotaremos $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ (ver Cendra, Marsden y Ratiu (2001) [1] para el caso sin fuerzas).

Luego, podemos pensar que el proceso de reducir el sistema (Q, L, f) para obtener el sistema $\left((T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}})_\mu, \widehat{L_\mu}, \widehat{f_\mu}\right)$ es una flecha $\Upsilon_{\mathfrak{A}}$ entre elementos de $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}$.

Reducción de sistemas discretos

(Q, L_d, f_d) sistema Lagrangiano discreto forzado, G grupo de simetría, $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}_d$ conexión principal y conexión discreta afín en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$, respectivamente.

(Q, L_d, f_d) sistema Lagrangiano discreto forzado, G grupo de simetría, $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}_d$ conexión principal y conexión discreta afín en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$, respectivamente.

Teorema

$*$ *Una sección G-equivariante $f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$ induce una sección $\widehat{f_d} : \tilde{G} \times Q/G \longrightarrow T^*(\tilde{G} \times Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^*$, donde $\tilde{G} := (Q \times G)/G$ es el fibrado conjugado.*

(Q, L_d, f_d) sistema Lagrangiano discreto forzado, G grupo de simetría, $\mathfrak{A}$ y $\mathcal{A}_d$ conexión principal y conexión discreta afín en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$, respectivamente.

Teorema

∗ *Una sección G-equivariante $f_d : Q \times Q \longrightarrow T^*(Q \times Q)$ induce una sección $\widehat{f_d} : \tilde{G} \times Q/G \longrightarrow T^*(\tilde{G} \times Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^*$, donde $\tilde{G} := (Q \times G)/G$ es el fibrado conjugado.*

∗ *Sistema reducido $\left(\tilde{G} \times Q/G, \widehat{L_d}, \widehat{f_d}\right)$.*

Reducción de sistemas discretos

Tanto el sistema discreto original como el reducido pueden pensarse como elementos de una misma clase (conjetural) de sistemas dinámicos a tiempo discreto llamados *sistemas de Lagrange–Poincaré discretos forzados* y que denotaremos $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}_d$ (ver Fernández, Tori y Zuccalli (2016) [2] para el caso sin fuerzas).

Reducción de sistemas discretos

Tanto el sistema discreto original como el reducido pueden pensarse como elementos de una misma clase (conjetural) de sistemas dinámicos a tiempo discreto llamados *sistemas de Lagrange–Poincaré discretos forzados* y que denotaremos $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}_d$ (ver Fernández, Tori y Zuccalli (2016) [2] para el caso sin fuerzas).

Luego, podemos pensar que el proceso de reducir el sistema (Q, L_d, f_d) para obtener el sistema $\left(\tilde{G} \times Q/G, \widehat{L_d}, \widehat{f_d}\right)$ es una flecha $\Upsilon_{\mathcal{A}_d}$ entre elementos de $\mathfrak{f}\mathfrak{L}\mathfrak{P}_d$.

Discretización de sistemas Lagrangianos forzados

Discretización mediante retracciones

$R : TQ \longrightarrow Q$ una retracción.

* $\widetilde{R} : TQ \longrightarrow Q \times Q$, $v_q \mapsto (q, R(v_q))$, es un difeomorfismo entre abiertos que contienen a la sección nula de TQ y la diagonal de $Q \times Q$.

Discretización mediante retracciones

$R : TQ \longrightarrow Q$ una retracción.

$*$ $\widetilde{R} : TQ \longrightarrow Q \times Q$, $v_q \mapsto (q, R(v_q))$, es un difeomorfismo entre abiertos que contienen a la sección nula de TQ y la diagonal de $Q \times Q$.

$*$ Llamaremos *discretización* de (Q, L, f) al sistema Lagrangiano discreto forzado (Q, L_d, f_d) donde

$$L_d := (\widetilde{R}^{-1})^* L = L \circ \widetilde{R}^{-1} \text{ y } f_d := (\widetilde{R}^{-1})^* f.$$

Discretización mediante retracciones

$R : TQ \longrightarrow Q$ una retracción.

$*$ $\widetilde{R} : TQ \longrightarrow Q \times Q$, $v_q \mapsto (q, R(v_q))$, es un difeomorfismo entre abiertos que contienen a la sección nula de TQ y la diagonal de $Q \times Q$.

$*$ Llamaremos *discretización* de (Q, L, f) al sistema Lagrangiano discreto forzado (Q, L_d, f_d) donde

$$L_d := (\widetilde{R}^{-1})^* L = L \circ \widetilde{R}^{-1} \text{ y } f_d := (\widetilde{R}^{-1})^* f.$$

$*$ Podemos pensar en la discretización como una asignación (conjetural) $\widetilde{\mathcal{R}} : \mathfrak{fLP} \longrightarrow \mathfrak{fLP}_d$.

Discretización vs reducción

(Q, L, f) sistema Lagrangiano forzado con grupo de simetría G,
$R : TQ \longrightarrow Q$ retracción G-equivariante.

$$
\begin{tikzcd}
(Q, L, f) \arrow[r, dashed, "\widetilde{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "\Upsilon_{\mathfrak{A}}"'] & (Q, L_d, f_d) \arrow[d, "\Upsilon_{\mathcal{A}_d}"] \\
\left(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}, \widehat{L}, \widehat{f} \right) \arrow[r, dashed, "?"] & \left((\tilde{G} \times Q/G), \widehat{L_d}, \widehat{f_d} \right)
\end{tikzcd}
$$

En realidad, todos los sistemas están definidos sobre subvariedades asociadas a un valor regular μ.

Discretización vs reducción

Teorema
Sean (Q, L, f) *un sistema Lagrangiano forzado con grupo de simetría* G *y* R *una retracción* G*-equivariante en* Q. *Sean* $\mathfrak{A}$ *una conexión principal en* $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ *y* $\mathcal{A}_d$ *una conexión discreta afín en* $\pi : Q \longrightarrow Q/G$.

Discretización vs reducción

Teorema
Sean (Q, L, f) un sistema Lagrangiano forzado con grupo de simetría G y R una retracción G-equivariante en Q. Sean $\mathfrak{A}$ una conexión principal en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$ y $\mathcal{A}_d$ una conexión discreta afín en $\pi : Q \longrightarrow Q/G$. Entonces, dado un valor regular μ de J_f, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(Q, L, f) \arrow[r, dashed, "\widetilde{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "\Upsilon_{\mathfrak{A}}"'] & (Q, L_d, f_d) \arrow[d, "\Upsilon_{\mathcal{A}_d}"] \\
\left(T(Q/G) \oplus \tilde{\mathfrak{g}}, \widehat{L}, \widehat{f}\right) \arrow[r, dashed, "\bar{\mathcal{R}}"'] & \left((\tilde{G} \times Q/G), \widehat{L_d}, \widehat{f_d}\right)
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\mathcal{R}}$ es la retracción "bajada al cociente" y volvemos a omitir μ.

El problema general

* Definir adecuadamente las categorías $\mathfrak{fLP}$ y $\mathfrak{fLP}_d$.

El problema general

* Definir adecuadamente las categorías $\mathfrak{fLP}$ y $\mathfrak{fLP}_d$.

* Definir un funtor $\Delta : \mathfrak{fLP} \longrightarrow \mathfrak{fLP}_d$ que capture la noción de discretización (esto ni siquiera es claro cómo hacerlo en el caso sin fuerzas).

Referencias

[1] H. Cendra, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu. **"Lagrangian Reduction by Stages".** In: *Memoirs Of The American Mathematical Society* 152 (2001), pp. 1–108.

[2] Javier Fernández, Cora Tori, and Marcela Zuccalli. **"Lagrangian reduction of discrete mechanical systems by stages".** In: *J. Geom. Mech.* 8.1 (2016), pp. 35–70. ISSN: 1941-4889. DOI: 10.3934/jgm.2016.8.35.

[3] M. de León, M. Lainz, and A. López-Gordón. **"Symmetries, constants of the motion and reduction of mechanical systems with external forces".** In: *Journal of Mathematical Physics* 62 (2021).

[4] J. E. Marsden and M. West. **"Discrete Mechanics and Variational Integrators".** In: *Acta Numerica* 10 (2001), pp. 357–514.

Muchas gracias